

## THERMOACOUSTIQUE

La thermoacoustique s'occupe des relations entre ondes sonores et transfert thermique. Les transferts thermiques peuvent amplifier les ondes sonores et inversement les ondes sonores peuvent occasionner des transferts thermiques contre nature, d'un point froid vers un point chaud (fonctionnement réfrigérateur ou pompe à chaleur).

Ceux qui travaillent sur la combustion cherchent à minimiser cet effet, car il déstabilise la flamme, occasionnant des imbrûlés et des vibrations destructrices auxquelles d'éventuelles parties mobiles sont particulièrement sensibles.

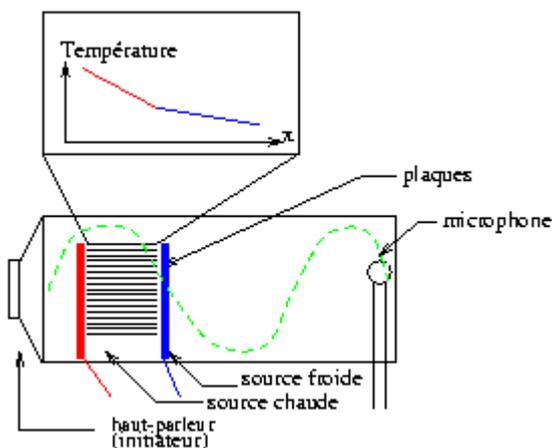
Mais l'effet thermoacoustique peut être intéressant car il produit du travail, de l'exergie, à partir d'un transfert de chaleur (fonctionnement moteur ou machine thermique).

Sur cette page, nous nous attacherons à modéliser le cycle thermoacoustique et à optimiser son rendement exergetique, afin d'atteindre le rendement de Carnot.

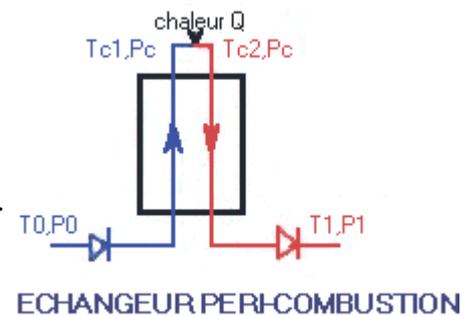
### Les ondes:

Dans une onde sonore les particules de gaz subissent des variations de position, de vitesse et de pression, généralement sinusoidales, en tout cas cycliques.

Une onde peut être progressive (en milieu ouvert) ou stationnaire (en milieu clos). Dans un milieu monodimensionnel, une onde stationnaire est la superposition de 2 ondes progressives de sens opposés. Une onde de pression s'exprime  $P_a(x,t)=F(x-a.t)+G(x+a.t)$ , où  $x$  est l'abscisse,  $t$  le temps,  $a$  la vitesse locale du son,  $P_a$  la pression acoustique locale instantanée,  $F$  et  $G$  des fonctions réelles continues et dérivables presque partout, généralement périodiques de pulsation  $\omega$  (rad/s) et de longueur d'onde  $\lambda=2a\pi/\omega$ . Pour une onde stationnaire  $F=G$ , et pour une onde progressive  $F=0$  ou  $G=0$ . On voit qu'il existe de nombreuses autres possibilités mais la périodicité en un point n'est plus visible: c'est une sorte de clapotis ou de bruit.



Voici à gauche le montage thermoacoustique standard et à droite ce qu'on voudrait réaliser. Le **stack** (la pile de plaques) avec son fort gradient thermique amplifie les ondes sonores. Dans le montage de droite ce rôle est assumé par les alvéoles de l'échangeur.

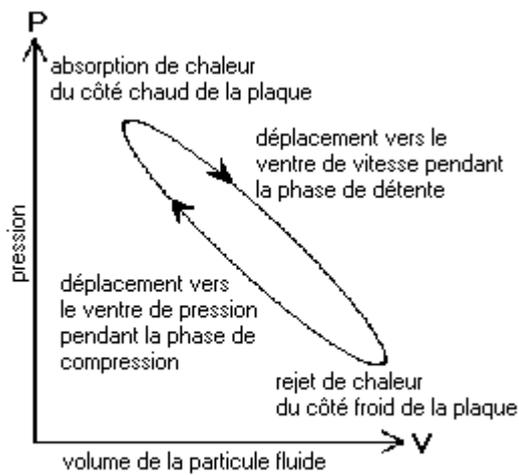


chaude pour 1000Pa de pression acoustique. Le montage de droite vise un fonctionnement moteur.

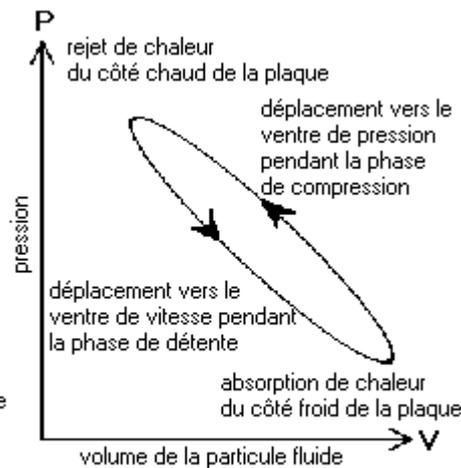
Les différences principales: à gauche une onde stationnaire et un stack de longueur quart d'onde, à droite une onde progressive avec flux de circulation et une longueur d'échangeur égale à plusieurs dizaines de longueurs d'onde (fréquence acoustique élevée, rendement exergetique proche de 100%).

Pour analyser correctement le fonctionnement de ces systèmes il faut descendre au niveau de la particule fluide. c'est ce que font les 2 schémas ci-dessous.

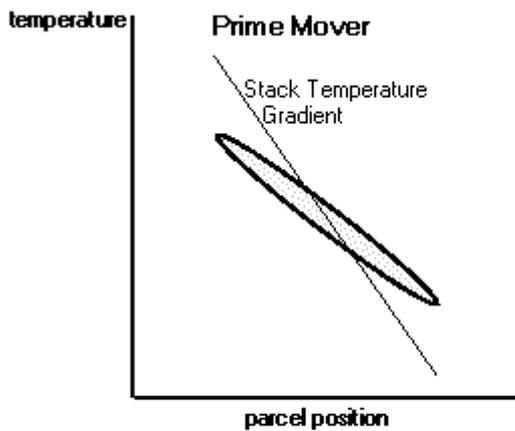
cycles de la particule en diagramme (P,v)



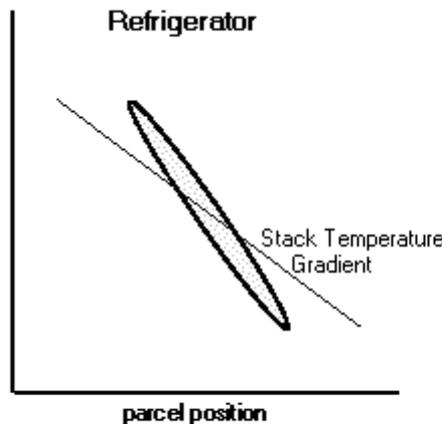
Moteur thermoacoustique



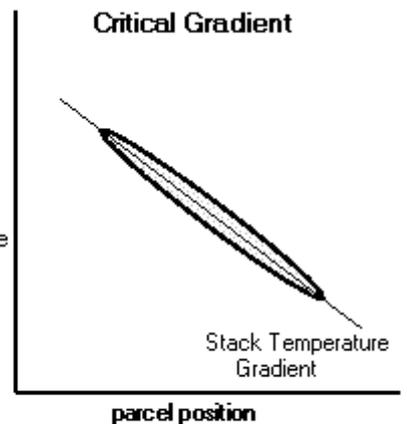
Réfrigérateur thermoacoustique



parcel position



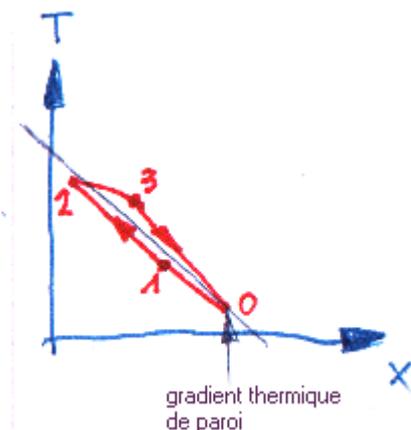
parcel position



parcel position

## Relationship of stack and parcel temperature for Heat Engine mode determination

cycles de la particule en diagramme (T,x)



Considérons le cycle thermodynamique de la particule fluide de la manière un peu caricaturale représentée ci-contre en diagramme (T,x), c'est à dire température-position.

On a 4 évolutions:

0-1. compression adiabatique (sans échange de chaleur) sans frottement, donc isentropique.

1-2. réchauffe à pression constante.

2-3. détente adiabatique isentropique.

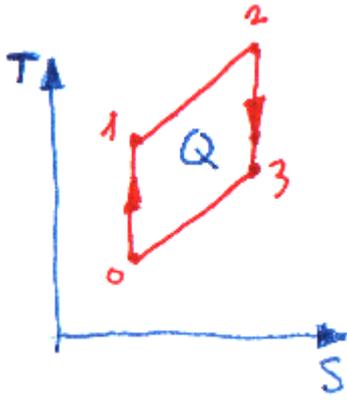
3-0. refroidissement à pression constante.

Si les compression et détente adiabatiques sont bien synchronisées avec le déplacement de la particule, celle-ci peut suivre exactement le gradient thermique de la paroi. Ensuite, lors de la réchauffe ou du refroidissement isobare, on continue à longer le gradient avec un léger  $\Delta T$  pour assurer le transfert thermique,  $\Delta T$  qui peut être aussi petit qu'on veut, typiquement

qq dixièmes de degré, en jouant sur l'écartement entre plaques ou le diamètre d'alvéole: on l'a prouvé dans l'optimisation de l'échangeur.

En diagramme (T,x) le cycle peut donc être quasiment plat et donc les pertes exergetiques par saut de température presque nulles. Cela ne signifie pas que la puissance motrice du cycle est nulle. Pour le voir il faut passer en diagramme (T,S) ci-dessous. Notons toutefois avant de quitter ce diagramme que comme les phases d'échange thermique ne sont pas exactement (et même pas du tout, voir plus bas) superposées dans l'espace, le flux de chaleur moyen sur un cycle n'est pas constant le long de la paroi, ce qui doit pourtant être le cas dans une configuration d'échangeur, il faut le compenser par de multiples cycles décalés en abscisse x correspondant à autant de particules voisines, autrement dit la longueur de déplacement  $x_2-x_0$  doit être faible devant la longueur totale  $L$  de l'échangeur.

Voici le même cycle en diagramme (T,S), c'est à dire température-entropie. Toute quantité de chaleur



infinitésimale  $\delta Q$  reçue par la particule entraîne une variation d'entropie  $dS = \delta Q/T$ , d'où l'on tire  $\delta Q = T \cdot dS$ , puis  $Q = \int_{\text{cycle}} T \cdot dS$ . La surface à l'intérieur du cycle est donc égale à la chaleur  $Q$  reçue par la particule pendant le cycle. Soit  $W$  le travail reçu, on a  $W + Q = 0$  sur un tour (par conservation de l'énergie). Le travail fourni  $-W$  est donc égal à la surface du cycle, qu'on cherche à maximiser. Comme  $T_0$  et  $T_2$  sont déterminés par les positions  $x_0$  et  $x_2$  sur la paroi qu'on ne veut pas trop écarter pour éviter les frottements, reste à trouver  $T_1$  qui maximise  $Q$  à  $T_0$  et  $T_2$  données. Comme  $dS = C_p \cdot dT/T - R \cdot dP/P$ , on a  $dS = C_p \cdot dT/T$  sur l'évolution 1-2, donc  $S_2 - S_1 = C_p \cdot \ln(T_2/T_1) = C_p \cdot \ln(T_3/T_0)$ . De plus  $Q_{1-2} = C_p \cdot (T_2 - T_1)$  et  $Q_{3-0} = C_p \cdot (T_0 - T_3)$ . Comme  $Q = Q_{1-2} + Q_{3-0}$ ,  $Q = C_p \cdot (T_2 - T_1 + T_0 - T_3)$ . Or  $T_2/T_1 = T_3/T_0 = K$ .

Alors  $Q = C_p \cdot (T_1 - T_0) \cdot (K - 1)$ ,  $Q = C_p \cdot (T_1 - T_0) \cdot (T_2/T_1 - 1)$ .

Dérivons  $Q$  par rapport à  $T_1$ :  $dQ/d(T_1) = C_p \cdot [(T_2/T_1 - 1) + (T_0 - T_1) \cdot T_2/T_1^2] = C_p \cdot [T_0 \cdot T_2/T_1^2 - 1]$ . Le maximum de  $Q$  est atteint quand  $T_1^2 = T_0 \cdot T_2$ , c'est à dire quand  $T_1$  est moyenne géométrique de  $T_0$  et  $T_2$ .

Alors  $Q = C_p \cdot T_0^{1/2} \cdot (T_2^{1/2} - T_0^{1/2}) \cdot (T_2^{1/2}/T_0^{1/2} - 1)$ , **travail fourni**  $Q = C_p \cdot (T_2^{1/2} - T_0^{1/2})^2$  (en J/kg). Quand  $T_0$  et  $T_2$  sont voisines, posons  $T_0 = T$  et  $T_2 = T + dT$ . On obtient la formule approximative  $Q = C_p \cdot dT^2 / (4 \cdot T)$ . On voit donc qu'on a intérêt à éviter les  $dT$  trop petits. Au passage calculons  $T_3$ :  $K = T_3/T_0 = T_2/T_1 = T_1/T_0$  donc  $T_3 = T_1$ ,  $x_3 = x_1$ ; les zones d'échange thermique  $[x_1, x_2]$  et  $[x_3, x_0]$  ne sont pas du tout superposées. La particule qui dépose la chaleur n'est pas la même que celle qui la prend. Corrigez (mentalement) les 2 diagrammes ci-dessus.

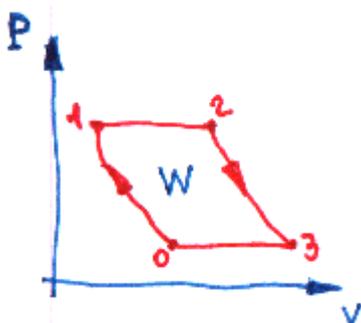
Ce travail  $Q$  est fourni aux particules voisines sous forme de compression, et il faut absolument l'évacuer du système le plus rapidement possible, sans quoi des phénomènes dissipatifs (ondes de choc, frottements intenses, écarts fluide-paroi...) vont se former, réduisant à néant notre optimisation. On peut récupérer ce travail en organisant dans le stack ou l'alvéole d'échangeur thermoacoustique un gradient de pression  $dP/dx$ , joint à une circulation moyenne  $\langle u \rangle$  dans le même sens, et des clapets anti-retour (à temps de réponse rapide) aux bornes du stack. De cette façon le travail produit est emmagasiné au plus près de la source, dans la particule elle-même, sous forme de compression.

Alors  $f \cdot Q \cdot \rho \cdot \phi^2 = \phi^2 \cdot \langle u \rangle \cdot dP/dx$  (en W/m), où  $\phi$  est le diamètre de l'alvéole,  $f$  la fréquence du cycle (en Hz),  $\rho$  la masse volumique (en kg/m<sup>3</sup>). On simplifie cette formule en  $f \cdot Q \cdot \rho = \langle u \rangle \cdot dP/dx$  (en W/m<sup>3</sup>).  $\langle u \rangle$  et  $dP/dx$  étant déterminés par la chaleur de combustion et l'optimisation de l'échangeur, reste à déterminer la fréquence  $f$ .

En première approche, le travail fourni à l'abscisse  $x$  pendant la phase 0-1,  $dW/dx = -d(Pu)/dx$  (en W/m<sup>3</sup>), est égal à la quantité de chaleur  $dQ/dx$  échangée dans la phase isobare 1-2 (valeur appelée compacité à la base du dimensionnement optimisé de l'alvéole, disons 1MW/m<sup>3</sup>), et la vitesse est de l'ordre de 50cm/s, disons 1m/s. Quand la pression est disons 1bar (=1e5 Pa),  $Pu$  varie entre 0 (au point 0) et 1e5 (au point 1). On a donc  $d(Pu) = 1e5$ , puis  $dx = 1e5/1e6 = 0.1m = 10cm$ . La phase de compression dure 10cm, la phase de réchauffe 10cm aussi, et pour un gradient de 1500K/m, le  $dT = T_2 - T_0$  est de 300K, donc  $Q = 256$  J/kg pour de l'air,  $Q \cdot \rho = 308$  J/m<sup>3</sup> = 308Pa. Si  $dP/dx$  est de l'ordre de 2000 Pa/m (du même ordre de grandeur que les frottements sans effet thermoacoustique) et  $\langle u \rangle = 1m/s$ ,  $f \cdot Q \cdot \rho = 2000$  W/m<sup>3</sup>, d'où  $f = 2000/308 = 6.5$ Hz et la longueur d'onde  $300/6.5 = 46m$  bien trop grande.

Transformons la formule  $f \cdot Q \cdot \rho = \langle u \rangle \cdot dP/dx$ .  $\langle u \rangle \cdot dP/dx = f \cdot C_p \cdot dT^2 / (4 \cdot T) \cdot \rho = f \cdot (\gamma/4(\gamma-1)) \cdot P \cdot (dT/T)^2$  puis  $\langle u \rangle \cdot dP/Pdx = f \cdot (\gamma/4(\gamma-1)) \cdot (dT/T)^2$ .

Il y a une relation entre  $f, u$  et  $dT$ :  $dT = dx \cdot T \cdot u / f$  à un facteur près. Donc  $dP/Pdx = u \cdot dx \cdot T^2 / T^2 \cdot f$ . Il faut donc maximiser  $u/f$  (en m), c'est à dire le déplacement, quand  $dx \cdot T$  est donné.



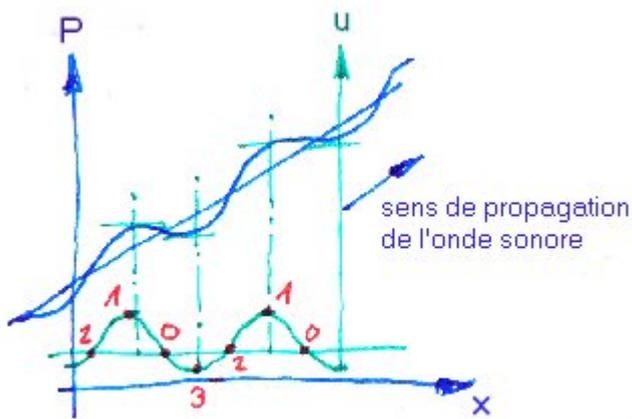
Ceux qui ne connaissent pas très bien la thermodynamique préfèrent utiliser le diagramme (P,V) ci-contre, c'est à dire pression-volume, dans lequel le travail  $W = \int_{\text{cycle}} (-P \cdot dV)$  apparaît directement. Mais comme on travaille à  $T_0$  et  $T_2$  imposées, son utilisation est moins pratique dans le cas présent, et d'ailleurs maintenant inutile. On peut quand même y lire que le travail est fourni pendant les phases 1-2 et 2-3.

Etablissons les équations différentielles d'une onde sonore avec apport de chaleur en alvéole.

équation	unité	coord. euleriennes (x,t)	définitions
----------	-------	--------------------------	-------------

conservation de la masse	kg/m <sup>3</sup>	$(d\rho/dt)_x + (d(\rho u)/dx)_t = 0$	$u = (dx/dt)_a = \text{vitesse (faible: } <1 \text{ m/s)}$
conservation de l'impulsion	N/m <sup>3</sup>	$d(\rho u)/dt + dP/dx = 0$ (oublie les frottements)	$T_i = T + u^2/(2 \cdot c_p)$
travail reçu	W/m <sup>3</sup>	$dW/dx = -d(Pu)/dx$	Pu est le work flow (en W/m <sup>2</sup> )
transfert thermique	W/m <sup>3</sup>	$dQ/dx = 8\pi\lambda\Delta T/\phi^2$	$\Delta T = T_{\text{paroi}} - T$ (K)
conservation de l'énergie	W/m <sup>3</sup>	$dH/dt = d(\rho c_p T)/dt = (dP/dt) \cdot \gamma/(\gamma-1) = (dW/dx) + (dQ/dx)$	
équation d'état du gaz parfait		$P = \rho r T$	
gradient de paroi	K/m	$d(T_p)/dx = d_x T$ constant, $d(T_p)/dt = 0$	$\eta = \text{viscosité (Pa.s)}$
frottement (parabolique)		$(dP/dx)_f = -32u\eta/\phi^2$	$\phi = \text{côté de l'alvéole (m)}$

Les coordonnées lagrangiennes ne sont pas très pratiques car les particules successives ne sont pas en début de cycle au même moment. Il vaut mieux remplacer la coordonnée lagrangienne  $a$  par une coordonnée de phase  $\phi$  qui varie de 0 à 1 quand la particule parcourt son cycle. Pour une particule donnée  $\phi$  est adimensionnelle et varie linéairement dans le temps:  $\phi = (t-t_0)/T$ , où  $t$  est le temps,  $t_0$  le temps au début de cycle (point 0) pour la particule considérée et  $T$  la période (en secondes). Il faut faire attention à ce que le temps de période  $T$  varie éventuellement avec la particule.



Profil instantané des pressions P et des vitesses u le long de l'échangeur

### Profil longitudinal instantané des pressions

Sur cette figure on a repéré en rouge les 4 points clés 0,1,2,3 du cycle dans la partie réchauffante de l'échangeur (dans la partie refroidissante le sens de propagation de l'onde sonore est inversé: en fonctionnement moteur, la partie haute pression du cycle doit toujours être aux hautes températures). Au point 0, la vitesse  $u$  est nulle, donc  $dP/dx > 0$  pour avoir une accélération. Ceci nous donne une relation entre la pression acoustique  $p = A \cdot \sin(\omega(t-x/a))$  où  $a$  est la vitesse du son, et le gradient de pression temporel moyen  $dxP$ .  $-dp/dx = A \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a)) > dxP$  au point 0, donc  $A \cdot (\omega/a) > dxP$ . Comme  $\omega = 2\pi \cdot f$ , plus la fréquence est élevée et courte la longueur d'onde, plus on peut se contenter d'une faible amplitude. La vitesse  $u$  aussi est sinusoidale, à une constante près:

$u = B \cdot \sin(\omega(t-x/a) + D) + \langle u \rangle$ , où  $D$  est le déphasage. On en tire  $du/dt = B \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D)$  et  $du/dx = -B \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D)$ . En considérant que les efforts visqueux à la paroi compensent en moyenne le gradient de pression  $dxP$ , on a l'équation  $du/dt - u \cdot (du/dx) = -dp/\rho dx$  (voir plus bas). Avec des ondes sinusoidales, ça donne:

$$B \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D) + (B \cdot \sin(\omega(t-x/a) + D) + \langle u \rangle) \cdot B \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D) = A \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a)) / \rho.$$

$$B \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D) + B^2 \cdot (\omega/2a) \cdot \sin(2\omega(t-x/a) + D) + \langle u \rangle \cdot B \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D) = A \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a)) / \rho.$$

$$B \cdot \omega \cdot (1 + \langle u \rangle / a) \cdot \cos(\omega(t-x/a) + D) + B^2 \cdot (\omega/2a) \cdot \sin(2\omega(t-x/a) + D) = A \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a)) / \rho.$$

$$B \cdot \omega \cdot (1 + \langle u \rangle / a) \cdot [\cos(\omega(t-x/a)) \cos(D) - \sin(\omega(t-x/a)) \sin(D)] + B^2 \cdot (\omega/2a) \cdot \sin(2\omega(t-x/a) + D) = A \cdot (\omega/a) \cdot \cos(\omega(t-x/a)) / \rho.$$

$$\omega \cdot [B \cdot (1 + \langle u \rangle / a) \cdot \cos(D) - A / a \rho] \cdot \cos(\omega(t-x/a)) - \omega \cdot B \cdot (1 + \langle u \rangle / a) \cdot \sin(D) \cdot \sin(\omega(t-x/a)) + B^2 \cdot (\omega/2a) \cdot \sin(2\omega(t-x/a) + D) = 0.$$

$\langle u \rangle$  est petit devant  $a$ :

$$\omega \cdot [B \cdot \cos(D) - A / a \rho] \cdot \cos(\omega(t-x/a)) - \omega \cdot B \cdot \sin(D) \cdot \sin(\omega(t-x/a)) + B^2 \cdot (\omega/2a) \cdot \sin(2\omega(t-x/a) + D) = 0.$$

$B$  est petit devant  $a$ :

$$\omega \cdot [B \cdot \cos(D) - A / a \rho] \cdot \cos(\omega(t-x/a)) - \omega \cdot B \cdot \sin(D) \cdot \sin(\omega(t-x/a)) = 0.$$

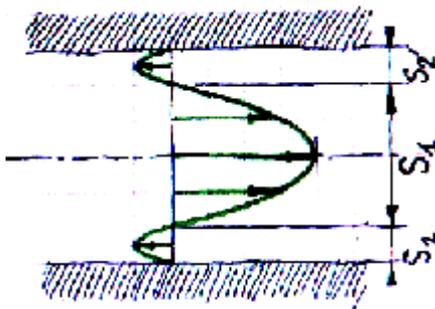
Ceci est valable en tout (x,t) donc  $[B \cdot \cos(D) - A/a\rho] = 0$  et  $B \cdot \sin(D) = 0$ , puis  $\sin(D) = 0$ ,  $D = 0$  ou  $\pi$ ,  $\cos(D) = -1$  ou  $1$ . Comme A et B sont positifs,  $\cos(D) = 0$ ,  $D = 0$ , puis  $B = A/a\rho$ ,  $B/a = A/a^2\rho$ . a est la vitesse isotherme du son,  $a^2 = sT = P/\rho$ , donc  $B/a = A/P$ , relation qui lie les amplitudes de vitesse et de pression.

Calculons maintenant le déplacement  $\Delta x$  d'une particule pendant la phase 0-2. Comme  $u = (dx/dt)$  particulaire,  $dx/dt = B \cdot \sin(\omega(t-x/a)) + \langle u \rangle$ .

x est des 2 cotés de l'équation, c'est ennuyeux mais on peut considérer que pour une particule donnée x/a varie beaucoup moins que t, donc sur un demi-cycle  $\Delta x = \int_{0, \pi/\omega} (B \cdot \sin(\omega t) + \langle u \rangle) dt$ ,  $\Delta x = \langle u \rangle \cdot \pi/\omega + B \cdot 2\pi/\omega$ ,  $\Delta x = \pi/\omega \cdot (\langle u \rangle + 2B)$ ,  $\Delta x = (1/2f) \cdot (\langle u \rangle + 2B)$ ,  $\Delta x = (\langle u \rangle + 2B)/f$ .

Le  $\langle u \rangle$  sert avec le  $dxP$ , à récupérer le travail du cycle. Oublions le pour l'instant. On a alors  $\Delta x = B/f$ , puis  $dT = dxT \cdot B/f$ . Le travail du cycle est donc  $Q = \rho C_p \cdot dT^2 / (4 \cdot T)$  (en W/m<sup>3</sup>, voir plus haut) puis  $Q = \rho C_p \cdot (dxT \cdot B/f)^2 / (4 \cdot T) = \langle u \rangle \cdot dxP$ . En utilisant  $B = Aa/P$  et  $a^2 = sT$ , on obtient  $C_p \cdot (dxT \cdot A/f)^2 / 4(\gamma - 1)P = \langle u \rangle \cdot dxP$ . En posant  $A = K \cdot a \cdot dxP/f$  (avec  $K > 1/2\pi$ ), on trouve  $C_p \cdot (dxT \cdot K/f^2)^2 / 4(\gamma - 1)\rho = \langle u \rangle / dxP$ .

Si  $\langle u \rangle$  est fixé (par l'optimisation de l'échangeur),  $dxP$  est donc proportionnel à  $f^4$ . Bon point pour les hautes fréquences. Mais en fait la fréquence f n'est pas choisie librement. Pour un échangeur donné, elle est conditionnée par l'apport de chaleur en bout d'échangeur, apport qu'à l'idéal on souhaiterait variable à loisir.



### écoulement laminaire en gradient de pression adverse.

Une telle configuration du profil des vitesses est instable. Le gradient de pression positif engendre un contre-courant au voisinage de la paroi. On a  $-(\eta/\rho) \cdot (du/dy)_{\text{paroi}} = \tau = (\phi/4) \cdot dP/dx$ . La pression est homogène dans toute la section car les mécanismes d'équilibre se propagent à la vitesse du son. Le courant principal (central) s'amenuise dans son sens de propagation ( $S_1$  se réduit). De la même façon le contre-courant périphérique s'affaiblit en remontant (la section annulaire  $S_2$  se réduit).

Sans apport de travail l'écoulement central forme donc une sorte de cône.

Il serait tentant de modéliser le profil de vitesses par une double parabole (ce qui donne un modèle à 2 paramètres:  $S_1$  et  $(du/dy)_{\text{paroi}}$ ), mais un polynôme unique sur toute la section (forcément une quadriple, car la vitesse s'annule 4 fois, ce qui donne un modèle à 5 paramètres) est plus facile à manipuler et offre plus de possibilités. Soient  $R = \phi/2$  et  $r = R - y$ ;  $u(r)$  est une fonction paire qui s'annule en  $r = R$  et  $r = R_1$ , qui possède un maximum local en  $r = 0$ .  $u(r) = A \cdot (1 - r/R) \cdot (1 + r/R) \cdot (1 - r/R_1) \cdot (1 + r/R_1)$ ,  $u(r) = A \cdot (1 - r^2/R^2) \cdot (1 - r^2/R_1^2)$ . Incidemment le modèle n'a plus que 2 paramètres.

Le profil parabolique est un cas particulier correspondant à  $R_1 = \text{infini}$ .

Si  $R_1 = R$ ,  $(du/dy)_{\text{paroi}} = 0$ . C'est la famille de profils qu'on obtient par dégénérescence du profil parabolique lorsque la pression motrice  $dP/dx$  a disparu.

Si  $R_1 = i \cdot R$ ,  $u(r) = A \cdot (1 - r^4/R^4)$  et  $(du/dy)_{\text{paroi}}$  est maximal pour  $A = U_{\text{max}}$  donné. C'est la configuration d'entrée dans l'alvéole, la plus proche de la distribution uniforme des vitesses.

On peut reformuler ainsi le profil:  $u(r) = U_{\text{max}} \cdot (1 - p \cdot r^2) \cdot (1 - b \cdot r^2)$ , où  $p = 1/R^2$  est le coefficient de paroi (invariable),  $b = 1/R_1^2$  le coefficient de rebroussement et  $U_{\text{max}}$  la vitesse centrale.  $u/U_{\text{max}} = 1 -$

$(p+b) \cdot r^2 + pb \cdot r^4$ ,  $(du/dr)/U_{\text{max}} = -2(p+b) \cdot r + 4pb \cdot r^3$ ,  $(du/dr) = U_{\text{max}} \cdot 2r \cdot (2pb \cdot r^2 - (p+b))$  qui s'annule pour  $r = 0$  et  $r^2 = (p+b)/(2pb) = R^2 \cdot R_1^2 \cdot (1/R^2 + 1/R_1^2)/2 = (R^2 + R_1^2)/2$  donc  $r(\text{rebroussement}) \sim (R + R_1)/2$  ce qui correspond à peu près à la figure.

D'autre part le gradient de paroi est  $du/dy = -(du/dr)_R = -U_{\text{max}} \cdot 2R \cdot (2pb \cdot R^2 - (p+b)) = U_{\text{max}} \cdot 2R \cdot (p - b) = -4(\phi/v) \cdot dP/dx$ , où  $v$  est la viscosité cinématique.

$d^2u/dr^2 = U_{\text{max}} \cdot (-2(p+b) + 12pb \cdot r^2)$ , est la dérivée seconde au point r, à t et x constants.

$d^2u/dr^2$  s'annule quand  $r^2 = (p+b)/6pb = (R^2 + R_1^2)/6$ ,  $r(\text{inflexion}) = 0.58 \cdot r(\text{rebroussement})$ .

Calculons la vitesse débitante U.  $U = \int_{\pi R^2} (2\pi r \cdot dr \cdot u(r)) / \pi R^2 = \int_{\pi R^2} (u(r) \cdot d(r^2)) / R^2$ ,  $U = U_{\text{max}} \cdot (R^2 - (p+b)R^4/2 + pbR^6/3) / R^2$ ,  $U = U_{\text{max}} \cdot (1 - (p+b)R^2/2 + pbR^4/3)$ ,  $U = U_{\text{max}} \cdot (1/2 - b/2p + b/3p)$ ,  $U = U_{\text{max}} \cdot (1 - b/3p)/2$ .

Quant au carré moyen de la vitesse  $\langle u^2 \rangle = \int_{\pi R^2} (u^2(r) \cdot d(r^2)) / R^2$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot \int_{\pi R^2} ((1 -$

$(p+b)r^2 + pbr^4)^2 \cdot d(r^2) / R^2$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot \int_{\pi R^2} ((1 - 2(p+b)r^2 + ((p+b)^2 + 2pb)r^4 - 2(p+b)pbr^6 + p^2b^2r^8) \cdot d(r^2)) / R^2$ ,

$\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot (R^2 - (p+b)R^4 + ((p+b)^2 + 2pb)R^6/3 - (p+b)pbR^8/2 + p^2b^2R^{10}/5) / R^2$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot (1 - (p+b)R^2 +$

$((p+b)^2 + 2pb)R^4/3 - (p+b)pbR^6/2 + p^2b^2R^8/5)$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot (-b/p + ((1+b/p)^2 + 2b/p)/3 - (1+b/p)b/2p + b^2/5p^2)$ ,

$\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot (1/3 + (b/p) \cdot (-1 + 2/3 + 2/3 - 1/2) + (b/p)^2 \cdot (1/3 - 1/2 + 1/5))$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot (1/3 + (b/p) \cdot (-1/6) + (b/p)^2 \cdot (1/30))$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} \cdot (1 - (b/p)/2 + (b/p)^2/10)/3$ .

Le  $d^2u/dr^2$  moyen est  $\langle d^2u/dr^2 \rangle = \text{intégreale}(d^2u/dr^2 * d(r^2))/R^2$ ,

$\langle d^2u/dr^2 \rangle = U_{\text{max}} * \text{intégreale}((-2(p+b)+12pb*r^2)*d(r^2))/R^2$ ,  $\langle d^2u/dr^2 \rangle = U_{\text{max}} * (-2(p+b)R^2 + 6pb*R^4)/R^2$ ,

$\langle d^2u/dr^2 \rangle = U_{\text{max}} * (-2(p+b) + 6pb*R^2)$ ,  $\langle d^2u/dr^2 \rangle = 2 * U_{\text{max}} * (2b-p)$ .

En notant  $z=b/p$  pour simplifier les expressions, il vient:  $U = U_{\text{max}} * (1-z/3)/2$ ,  $\langle u^2 \rangle = U_{\text{max}} * (1-z/2 + z^2/10)/3$ ,  $\langle d^2u/dr^2 \rangle = 2p * U_{\text{max}} * (2z-1)$ .

Voyons maintenant l'équation différentielle à laquelle répond notre profil.

Par conservation de l'impulsion, en tout point du profil  $d(\rho u)/dt + dP/dx - \mu * d^2u/dy^2 = 0$ ,  $\rho * (du/dt) + u * (d\rho/dt) = \mu * d^2u/dy^2 - dP/dx$ ,  $\rho * (du/dt) - u * (d(\rho u)/dx) = \mu * d^2u/dy^2 - dP/dx$ ,  $\rho * (du/dt) - \rho u * (du/dx) - u^2 * (d\rho/dx) = \mu * d^2u/dy^2 - dP/dx$ . En divisant par  $s$  et en utilisant  $P = \rho s T$  (où  $s$  est la constante massique du gaz parfait ( $s = 8.314$ /massemolaire J/kg/K), habituellement notée  $r$ , interdite dans le cas présent pour cause de double signification), il vient  $du/dt - u * (du/dx) - u^2 * (d\rho/dx) = v * d^2u/dy^2 - sT * dP/dx$ , où  $v = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique ( $m^2/s$ ). En approx. isotherme  $dP = sT * d\rho$  et  $d\rho/\rho dx = dP/P dx$ , on obtient  $du/dt - u * (du/dx) = v * d^2u/dy^2 - sT * dP/P dx$  en tout point  $(x, r, t)$ . Ceci est donc valable en moyenne sur toute une section:  $dU/dt - d\langle u^2 \rangle / 2 dx - v * \langle d^2u/dr^2 \rangle = -sT * dP/P dx$  en tout point  $(x, t)$ . Puis

$U_{\text{max}} * [-dz/6dt - dz/12dx + z * dz/30dx - 2pv * (2z-1)] + (d(U_{\text{max}})/dt) * (1-z/3)/2 - (d(U_{\text{max}})/dx) * (1-z/2 + z^2/10)/6 = -sT * dP/P dx$ .

Rappelons nous la relation entre  $z$  et  $dP/dx$ . Sur la paroi  $u=0$ , donc  $\mu * d^2u/dr^2 = dP/dx = \mu * U_{\text{max}} * (-2(p+b) + 12pb * R^2)$ ,  $dP/dx = 2p\mu * U_{\text{max}} * (5z-1)$  puis  $-sT * dP/P dx = 2pv * U_{\text{max}} * (5z-1)$ . En notant  $L = \ln(U_{\text{max}})$ , il vient  $[-dz/6dt - dz/12dx + z * dz/30dx - 2pv * (2z-1)] + (dL/dt) * (1-z/3)/2 - (dL/dx) * (1-z/2 + z^2/10)/6 = 2pv * (5z-1)$

C'est maintenant que nous allons faire intervenir notre équation de profil;  $U_{\text{max}}$  et  $b$  dépendent de  $x$  et de  $t$ , pas de  $r$ .

$du/dt = d(U_{\text{max}} * (1-p*r^2) * (1-b*r^2))/dt = (1-p*r^2) * [(1-b*r^2) * d(U_{\text{max}})/dt - r^2 U_{\text{max}} * db/dt]$ .

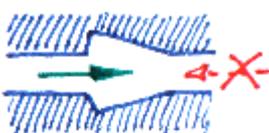
$du/dx = d(U_{\text{max}} * (1-p*r^2) * (1-b*r^2))/dx = (1-p*r^2) * [(1-b*r^2) * d(U_{\text{max}})/dx - r^2 U_{\text{max}} * db/dx]$ .

$d^2u/dr^2 = U_{\text{max}} * (-2(p+b) + 12pb*r^2)$ .

On ne peut dériver le modèle beaucoup plus car on tombe sur des incohérences, dûes au fait que ce n'est qu'une approximation d'ordre 4.

En prenant un peu de recul sur le modèle on s'aperçoit que les particules centrales et périphériques ne suivent pas le même cycle. Les  $dT$  sont différents, et donc le travail produit. Elles échangent du travail par compression et pas seulement par le biais des forces visqueuses, ce que notre modèle ne laisse pas percevoir (le  $r$  particulière restant constant, les vitesses radiales sont nulles).

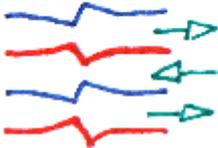
Le problème est alors trop complexe pour être résolu à la main, il faut utiliser un logiciel de CFD.



### clapet statique

Lorsqu'on tente de miniaturiser un clapet antiretour à ressort de rappel, on bute -à l'échelle millimétrique- sur une difficulté de fabrication et une grande sensibilité au colmatage par des poussières.

La présence de hautes températures ( $>200^\circ\text{C}$ ) dégrade les propriétés élastiques des aciers et donc celle d'un éventuel ressort.



Pour ces 3 raisons, on a parfois intérêt à utiliser un clapet statique (sans pièce mobile) dont le montage ci-contre, à effet de réflexion, constitue la solution la plus simple (l'autre solution, dûe à M. Barry, consiste à utiliser un vortex à échappement central et entrée périphérique tangentielle à forte perte de charge pour bloquer un éventuel contre-courant -vortex court-circuité dans le sens de passage normal-, dans un montage appelé diode hydraulique, est difficile à inclure dans une alvéole d'échangeur).

### CLAPET STATIQUE

**Mode de fonctionnement:** en régime stationnaire et quand la pression dynamique est largement inférieure à la pression ambiante, la perte de charge d'élargissement brusque est légèrement inférieure à la perte de charge de rétrécissement brusque (effet de veina contracta) mais surtout

-une onde de compression rebrousante se réfléchit sur la paroi de brusque changement de section, ce qui affaiblit sa propagation.

-si la pression dynamique approche l'ordre de grandeur de la pression ambiante (et donc la vitesse est proche de celle du son) le ralentissement périphérique occasionne une forte compression qui écrase la veine de circulation centrale et amplifie considérablement l'effet de veina contracta.

**réalisation, applications:** la section de passage doit varier au moins du simple au double. Le montage se prête bien à une réalisation emboutie qui peut être incluse en n'importe quel point d'un [échangeur thermique alvéolaire à plaques](#) (figure du bas).

Pour conclure ce paragraphe, nous avons là un accessoire permettant de bloquer d'éventuels contre-courants. On ne l'a pas inclus dans la modélisation thermoacoustique.

---

### pages francophones

[centre acoustique LMFA](#) Thermoacoustique des systèmes frigorifiques miniatures

[Générateur thermoacoustique annulaire à ondes progressives](#) (PDF, page 4 du cv de Stéphane Job)

[Machines thermoacoustiques](#) (université du Mans)

[Simulation numérique d'effets thermoacoustiques](#) (PS, travail de Jean-Yves Tinevez)

[Simulation numérique en propagation acoustique](#) (PS, travail de Stanislas Antczak)

[Un prototype de compresseur thermoacoustique](#) et [modélisation du régénérateur](#)

[Prototype de réfrigérateur Stirling thermoacoustique utilisant un agent fluide critique](#)

[Instabilité thermoacoustique : modélisation numérique d'un compresseur thermoacoustique](#) (travail de Y Delbende)

### pages anglophones

[Thermoacoustics](#) une bonne introduction de Ralph Muehleisen: définition, fonctionnement, état de l'art. On y apprend que le rendement exergetique a *déjà* été poussé à 40% du rendement de Carnot (qui est le maximum théorique). Ici, à [isentropics.org](#), on vise, par modélisation et optimisation systématique, à effleurer les 100%.

[Solar powered thermoacoustic refrigerator \(STADTAR\)](#) montage incluant un moteur et un réfrigérateur thermoacoustiques en série. Performances: côté chaud  $.457^2\pi/4*1350=221$  Watts à  $475^\circ\text{C}(=748\text{K})$ , côté froid  $2.5\text{W}$  à  $5^\circ\text{C}(=278\text{K})$ , côté ambiance à  $23^\circ\text{C}(=296\text{K})$ . Rendement de carnot correspondant  $r_c=(748-296)/748*296/(296-278)=0.604*16.44=9.93$  . Rendement réel  $r=2.5/221=1.13\%$ . Rendement exergetique  $r_e=r/r_c=1.14e-3$ , soit 3.37% de chaque côté.

[POWER AND PROPULSION IN THE NEW MILLENIUM](#) Thermo-Acoustic Cycle (TAC) Engines. Tiré du site de [Fellows Research Group, Inc](#) .

Tout cela est très ambitieux et prometteur.

[Performance measurements on a thermoacoustic refrigerator](#) "Frankenfridge" contient aussi de la théorie. p.29

### logiciels

[DSTAR](#) (Design Simulation for ThermoAcoustic Research). Le fichier zippé contient entre autres les [équations de la thermoacoustique](#), issues du modèle de Rott.

[Simtube](#) un programme de simulation de tube pulsé de Pierre Neveu.

---

question?  Envoyer

[INDEX](#)